



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



## Wykład 6

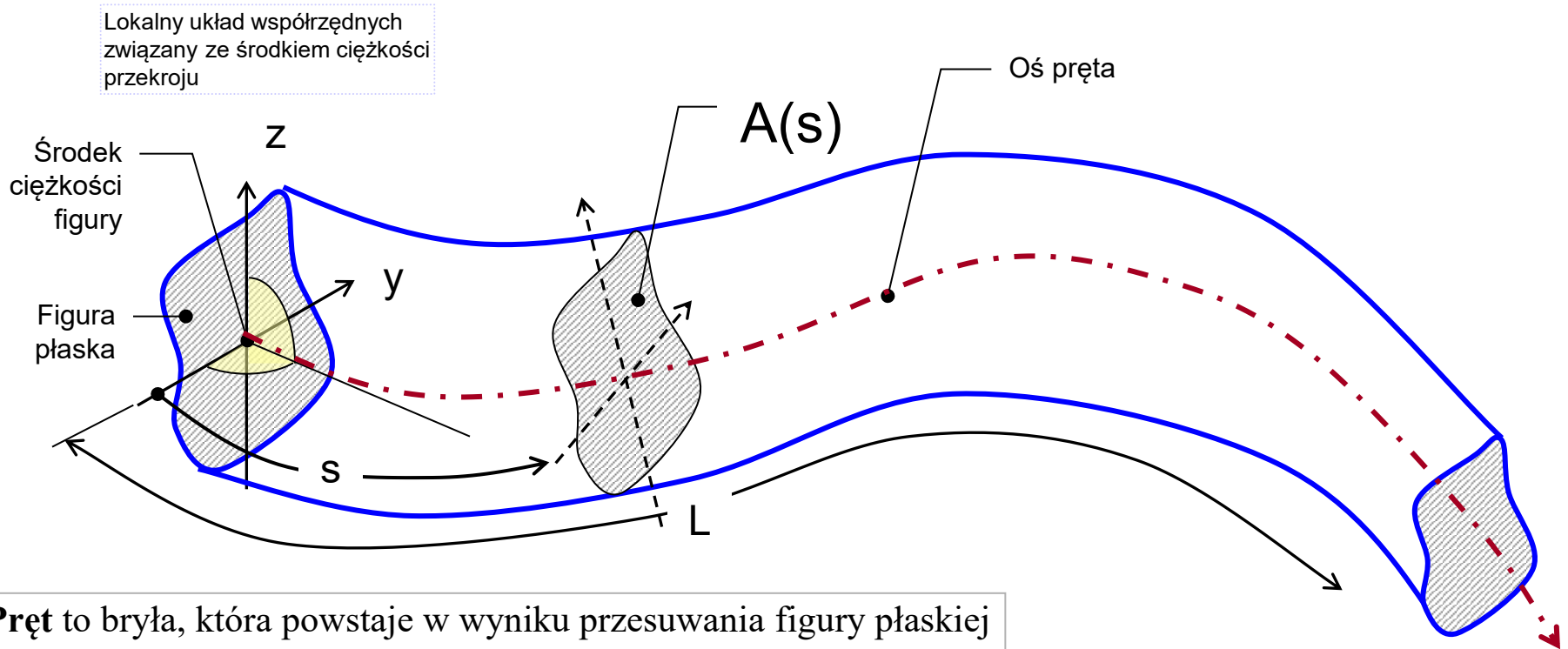
# Wytrzymałość pręta

Siły wewnętrzne w pręcie

Zasada de Saint Venant'a

Pręty ściskane i rozciągane

# Definicja pręta



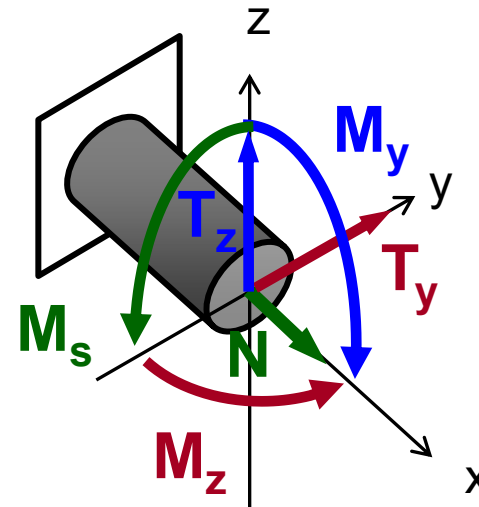
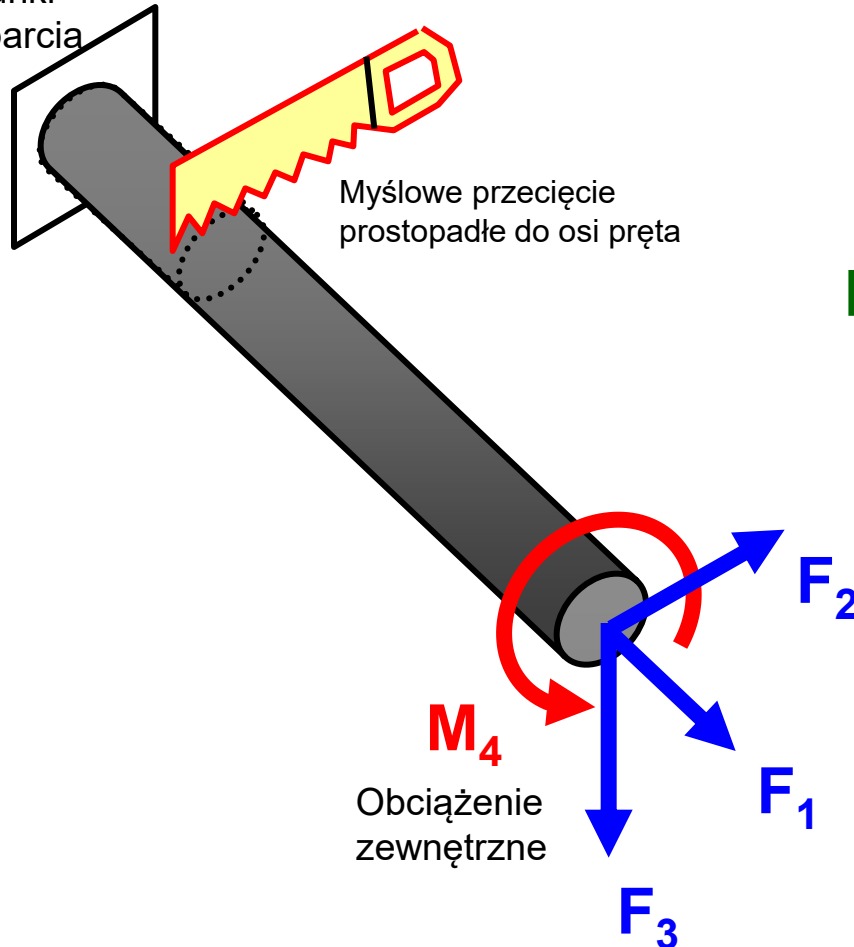
**Pręt** to bryła, która powstaje w wyniku przesuwania figury płaskiej (*przekroju poprzecznego*) wzdłuż linii prostej lub zakrzywionej (*osi pręta*) tak, by środek ciężkości figury zawsze pozostawał na tej osi, a płaszczyzna figury była do niej prostopadła.

Jeśli figura płaska nie obraca się w trakcie przesuwania, to jest to **pręt pryzmatyczny**, jeśli dodatkowo nie zmienia się kształt i wymiary figury to jest to **pręt o stałym przekroju**.



# Siły wewnętrzne w pręcie

Warunki podparcia



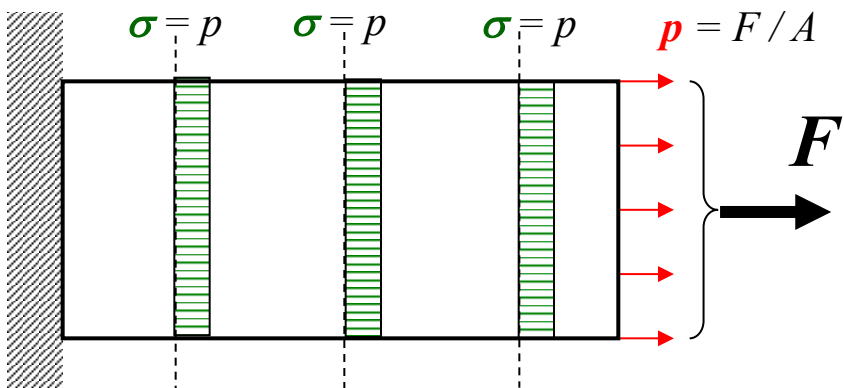
Lokalny układ współrzędnych przekroju związany z jego osiami centralnymi

Składowe wysiłku przekroju:

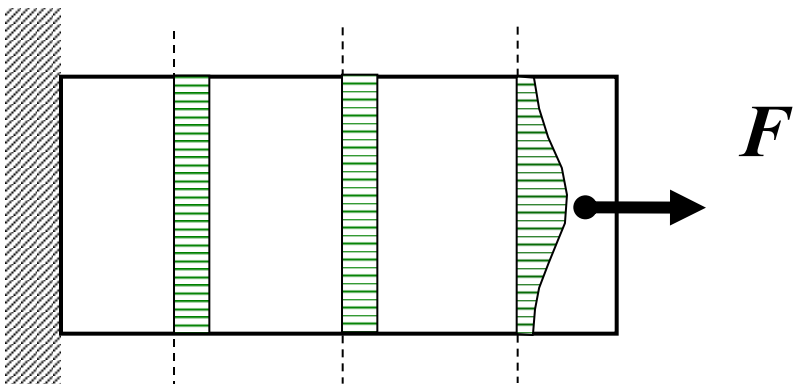
- $N$  - siła normalna
- $T_y$  - składowa siły tnącej
- $T_z$  - składowa siły tnącej
- $M_s$  - moment skręcający
- $M_y$  - składowa momentu gnącego
- $M_z$  - składowa momentu gnącego

Funkcje rozkładu składowych wysiłku przekroju w konstrukcji prętowej wzdłuż kolejnych prętów będziemy wyznaczać z równań równowagi myślowo wyciętego jej fragmentu odpowiednią płaszczyzną myślowego przecięcia

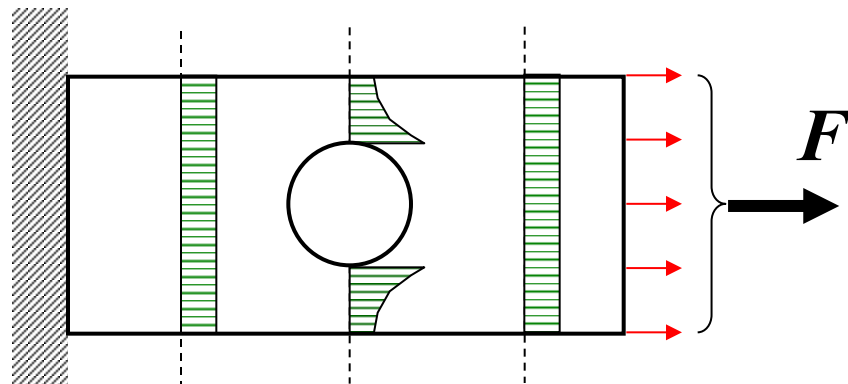
# Zasada de Saint Venanta



Rozważmy cieką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną równomiernie na przeciwległym brzegu siłą rozciągającą  $F$

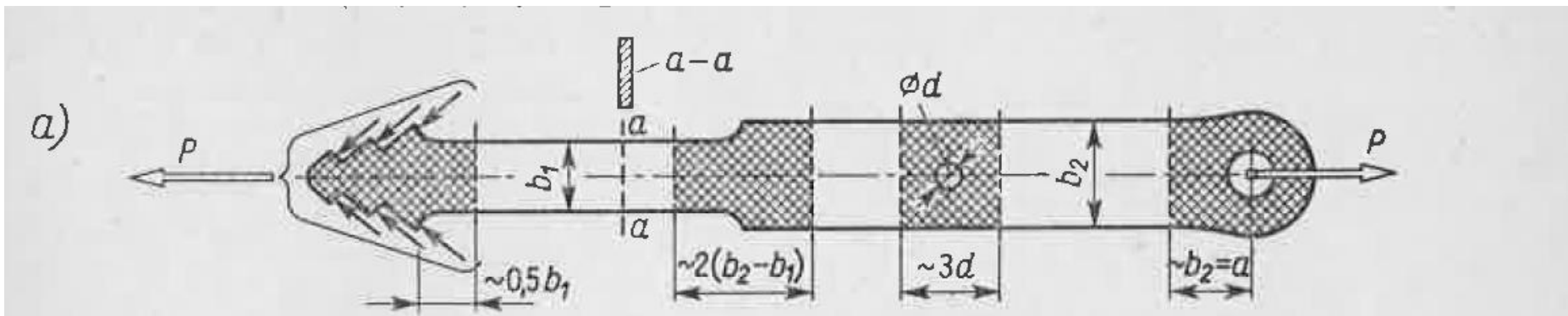


Jeżeli na pewien niewielki fragment ciała sprężystego działają dwa różne, ale statycznie równoważne obciążenia, to w odległościach dużych w porównaniu do gabarytu tego fragmentu powstają praktycznie takie same stany naprężenia i odkształcenia.



# Zasada de Saint Venanta

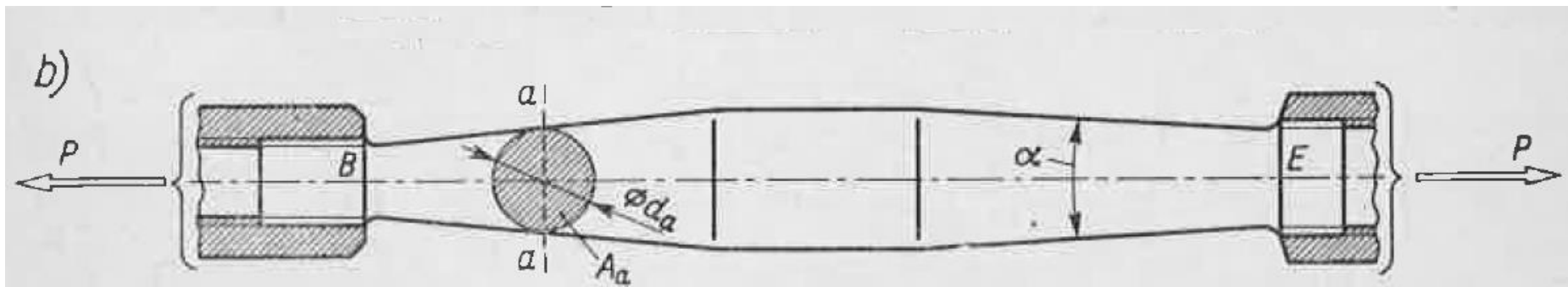
Przedziały stosowalności modelu pręta do rzeczywistych elementów obciążonych siłami wzdłużnymi.



Nierównomierność rozkładu naprężeń  $\sigma$  obserwujemy w przypadku raptownych zmian przekroju, tzw. karbów (np. raptowne zwężenia lub otwory).

Nierównomierność ta ogranicza się do otoczenia karbu (zakratkowane obszary), w których nie można stosować prostych wzorów WK.

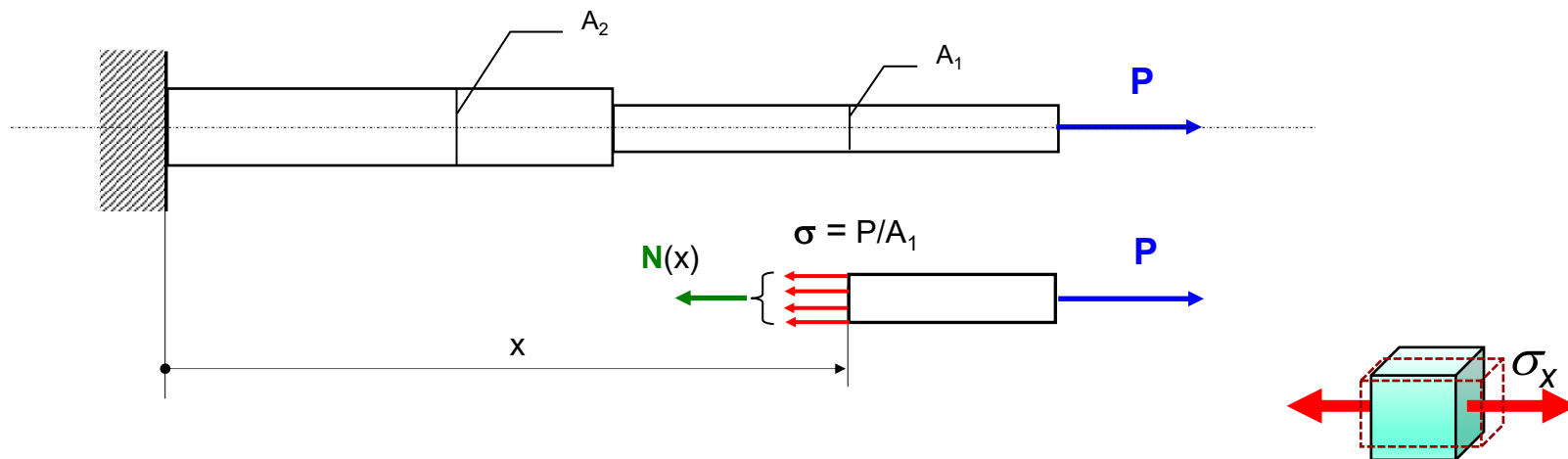
Wzory analityczne WK możemy stosować poza zakratkowanymi obszarami.



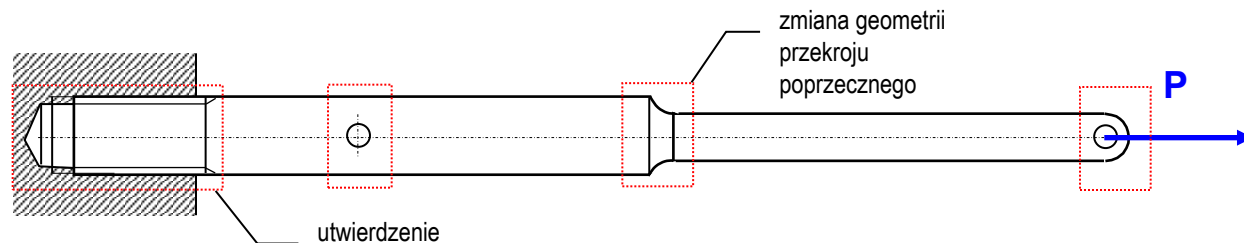
Zasada de Sait-Venanta pozwala na idealizację w budowie prostych modeli obliczeniowych dla różnych elementów konstrukcji.

# Pręty rozciągane i ściskane

W modelu pręta idealnego obciążonego siłami wzdłużnymi zakładamy równomierny rozkład naprężeń normalnych w całym przekroju myślowego przecięcia

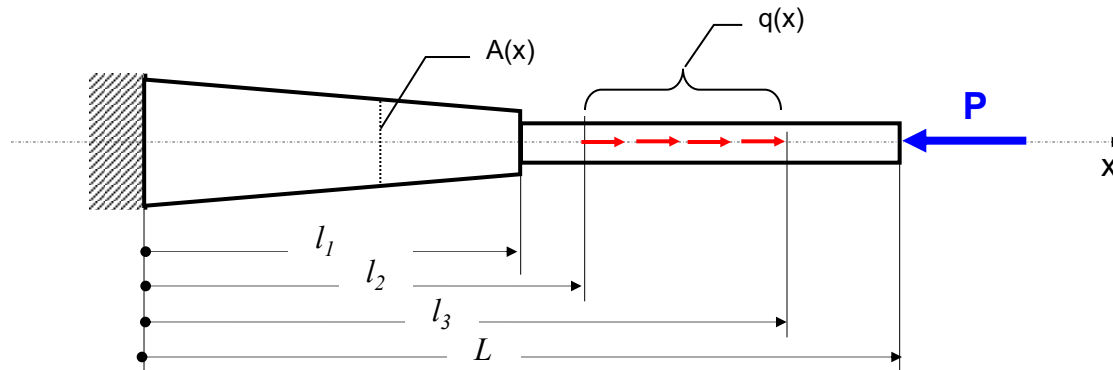


Rzeczywiste pręty wykazują odstępstwa od tego modelu w takich obszarach jak miejsca wprowadzenia siły, miejsca skokowej zmiany geometrii przekroju, utwierdzenia, strefy kontaktu. Zgodnie z zasadą de Saint Venanta, model pręta idealnego jest słuszny poza takimi obszarami

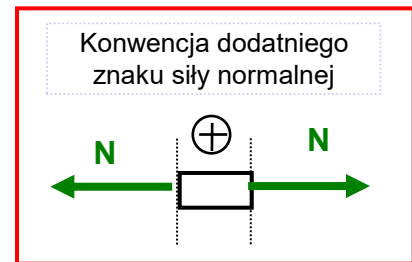
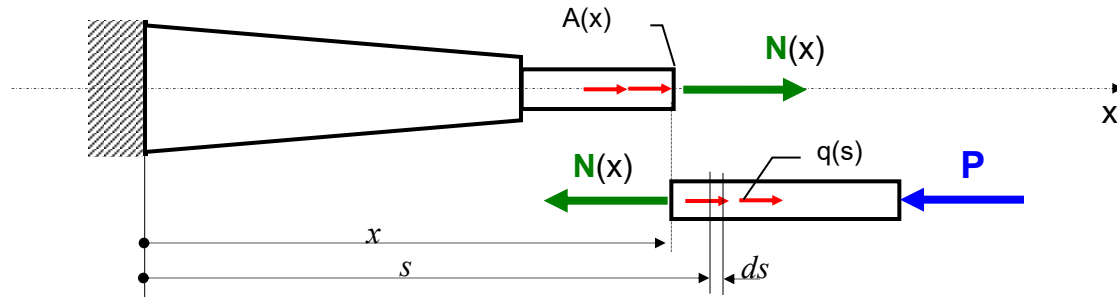


# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

Rozważmy model pręta prostego poddany działaniu sił osiowych



Interesującą nas zmienność siły normalnej wzdłuż długości pręta wyznaczmy **analizując równowagę myślowo odciętego fragmentu pręta**. Musimy przy tym rozważyć kilka myślowych przecięć stosownie do charakteru zmienności funkcji  $N(x)$ . Dla przykładu wyznaczmy równowagę fragmentu pręta po dokonaniu myślowego cięcia w przedziale  $x \in (l_2, l_3)$ .



Obie części pręta przeciętego płaszczyzną myślową są w stanie równowagi. Poszukiwaną wartość siły normalnej  $N(x)$  znajdziemy analizując równowagę na kierunku  $x$  jednej z tych części. Jak widać analiza równowagi części na prawo od przecięcia nie wymaga znajomości reakcji w miejscu utwierdzenia. Zapiszmy dla niej równanie równowagi sił w rzucie na oś  $x$ . Warto zauważyć, że o ile zwrot siły normalnej  $N(x)$  przyjęto jako dodatni (rozciąganie) to w równaniu równowagi siły przyjmują znaki, jako wektory, zgodnie ze swoim zwrotem względem osi  $x$ . Mamy zatem:

$$-N(x) + \int_x^{l_3} q(s) ds - P = 0$$

# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

Podobnie postąpimy we wszystkich przedziałach:

dla  $x \in (l_3, L)$ :

$$-N(x) - P = 0$$

dla  $x \in (l_2, l_3)$ :

$$-N(x) + \int_x^{l_3} q(s) ds - P = 0$$

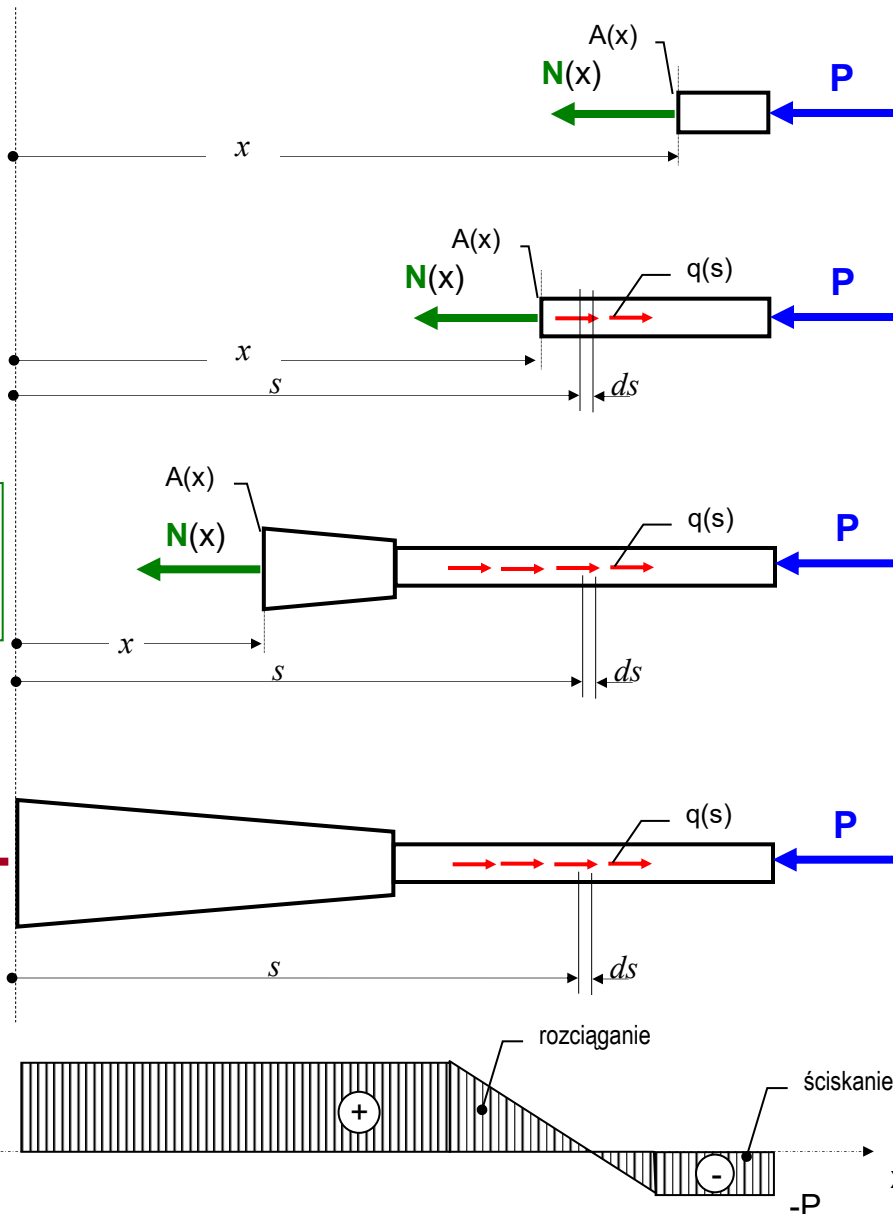
dla  $x \in (0, l_2)$ :

$$-N(x) + \int_{l_2}^{l_3} q(s) ds - P = 0$$

Możemy też wyznaczyć reakcję utwierdzenia:

$$-R + \int_{l_2}^{l_3} q(s) ds - P = 0$$

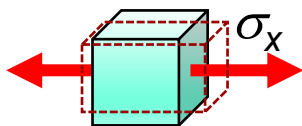
Wyniki przedstawiamy w postaci wykresu rozkładu siły normalnej wzdłuż osi pręta



# Podstawowe zależności dla pręta obciążonego siłami osiowymi

W praktyce interesuje nas intensywność siły na jednostkę pola przekroju, czyli naprężenia:

$$\sigma(x) = \sigma_{sr} = \frac{N(x)}{A(x)}$$



Na skutek jednowymiarowego stanu naprężenia pręt dozna odkształceń, które można policzyć z prawa Hooke'a

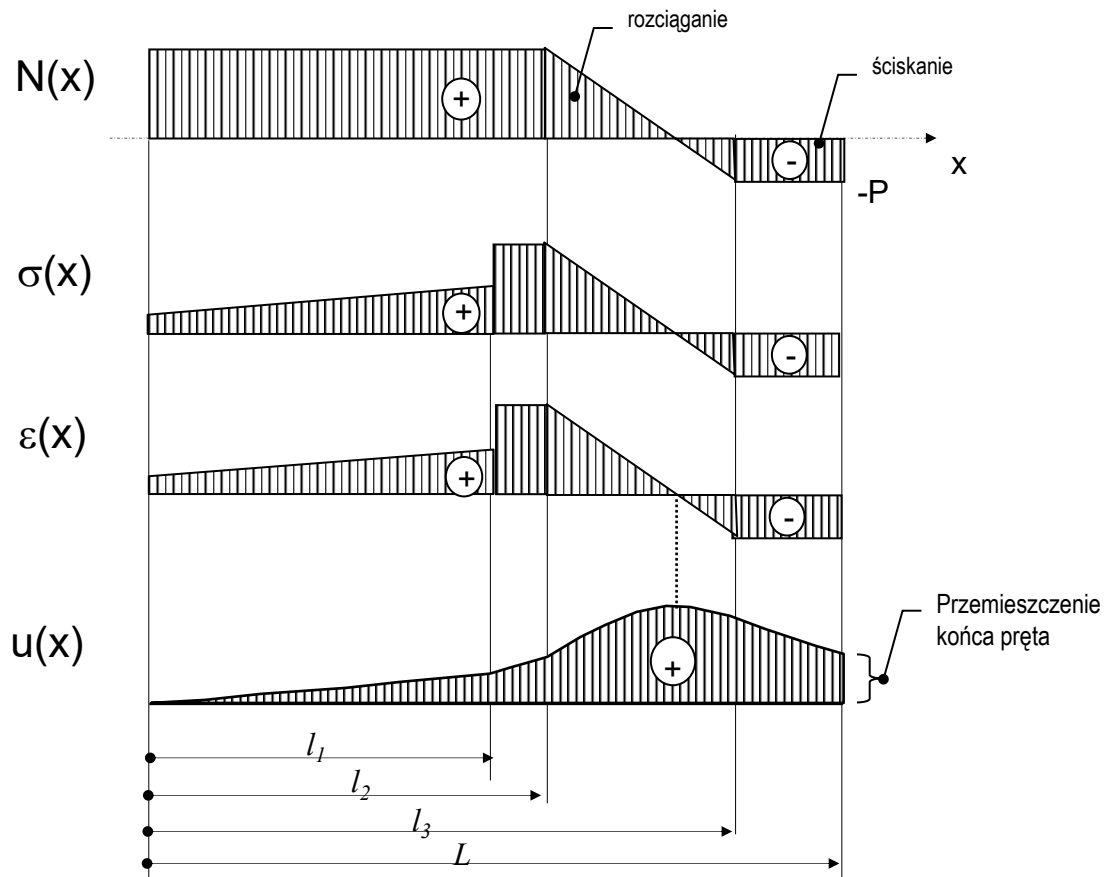
$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

→ 
$$\varepsilon(x) = \frac{1}{E} \sigma_x$$

Istnienie odkształceń wskazuje na skłonność pręta do wydłużania. Możemy wyznaczyć funkcję przemieszczeń całkując funkcję odkształceń:

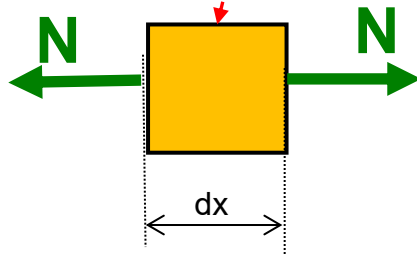
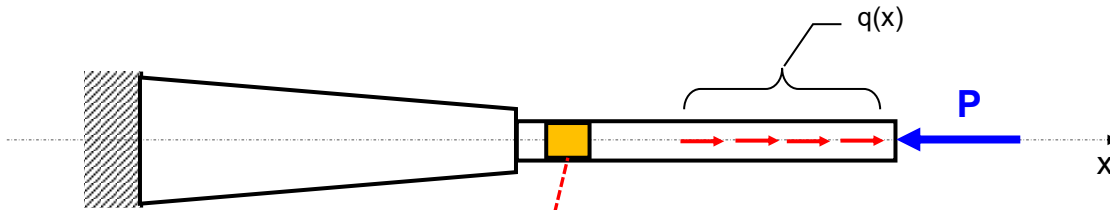
$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

Wyniki analizy możemy przedstawić zatem na wykresach:

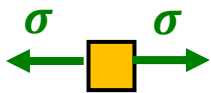


*Rozkład wzdłuż długości pręta: siły normalnej  $N(x)$ , naprężenia normalnego  $\sigma(x)$ , odkształcenia  $\varepsilon(x)$  i funkcji przemieszczeń  $u(x)$*

# Energia sprężysta pręta obciążonego siłami osiowymi

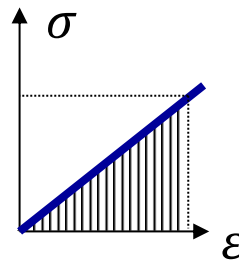


Stan naprężenia



Prawo Hooke'a

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$



Energia sprężysta rozciągania:

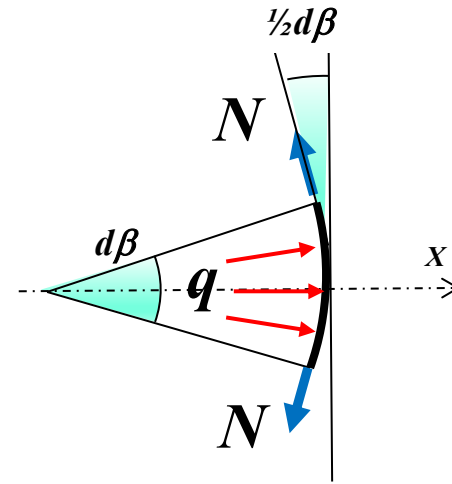
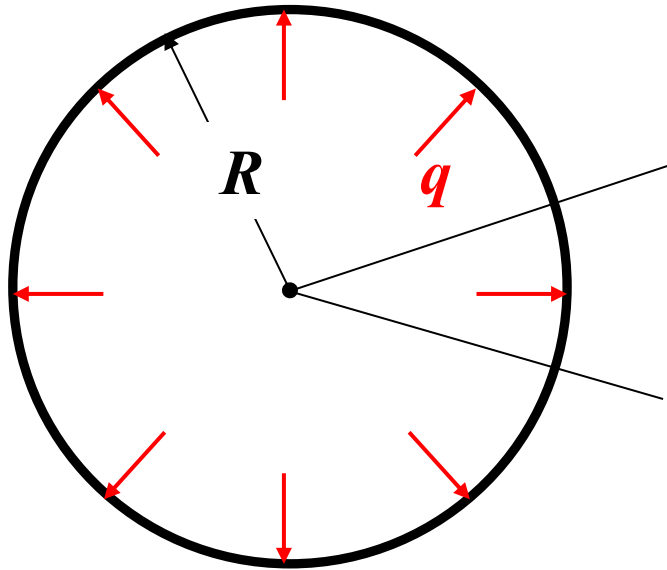
$$dU = \frac{1}{2} \sigma(x) \varepsilon(x) dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\sigma^2(x)}{E} A dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(x)}{AE} dx$$

# Pierścień kołowy

Pierścień kołowy o promieniu  $R$  i polu przekroju  $A$ , obciążono wydatkiem  $q$   
Znaleźć siłę i naprężenia w pierścieniu



Równanie sił na kierunku  $x$ :

$$q R d\beta - 2 N \sin \frac{d\beta}{2} = 0$$
$$\cong \frac{d\beta}{2}$$

Siła w pierścieniu:

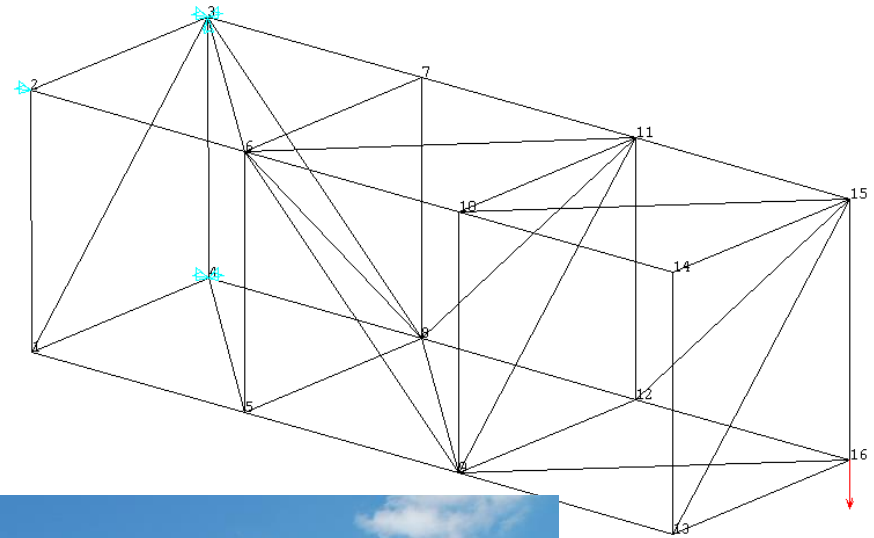
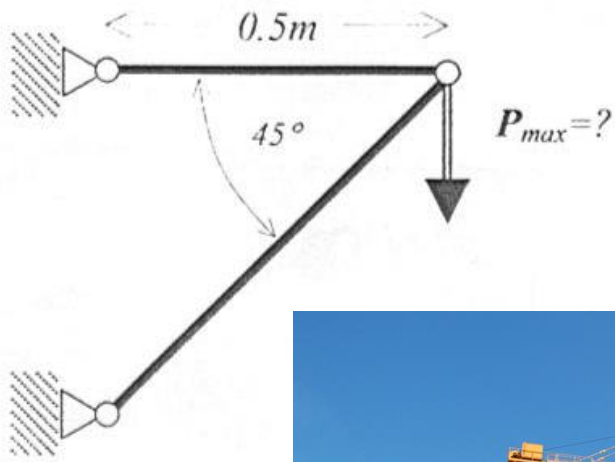
$$N = q R$$

Naprężenia w pierścieniu:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{q R}{A}$$

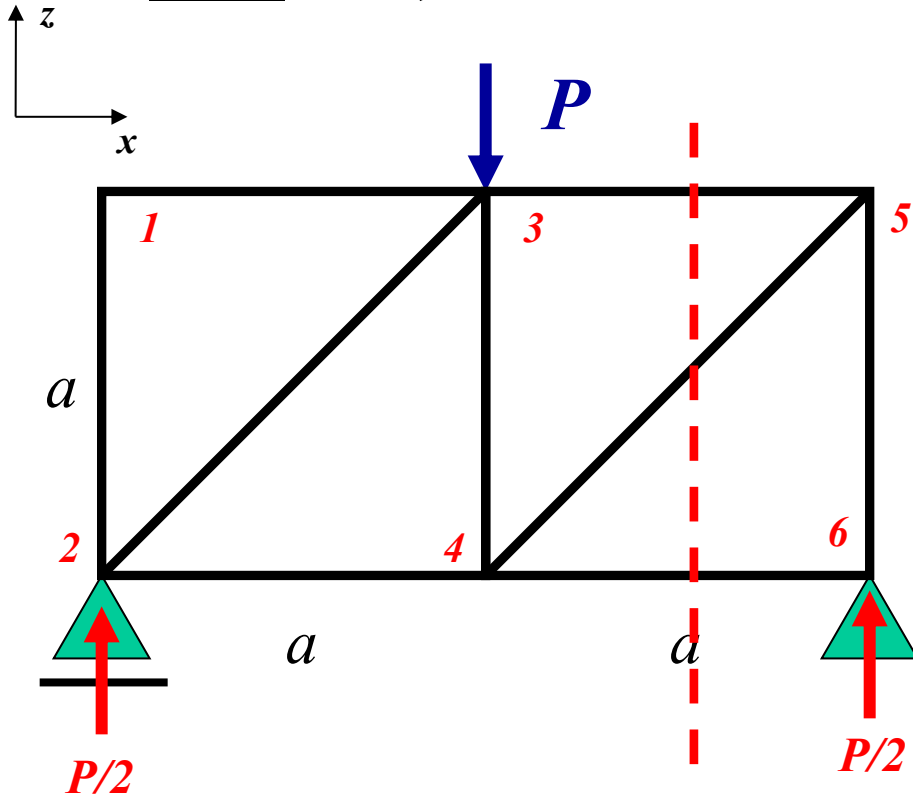
# Kratownica

**Kratownica** – składa się z prętów prostych połączonych na końcach (w węzłach) przegubowo



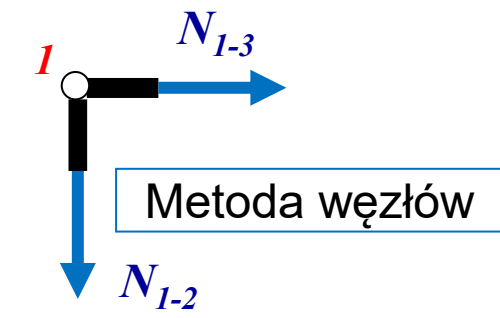
# Kratownica – sposób rozwiązania

Dane:  $P$ ,  $a$ ,  $EA = const$



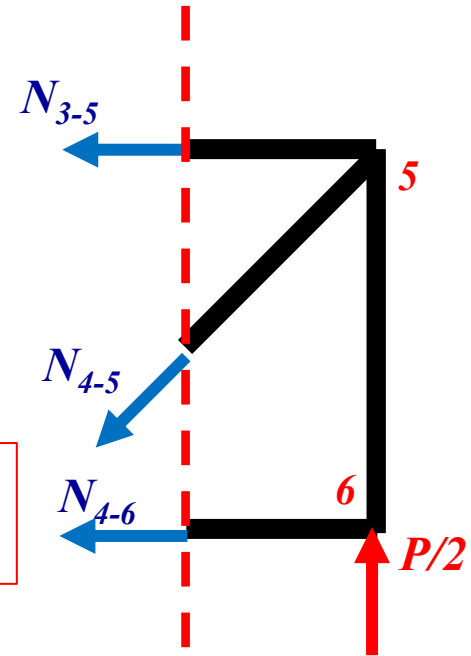
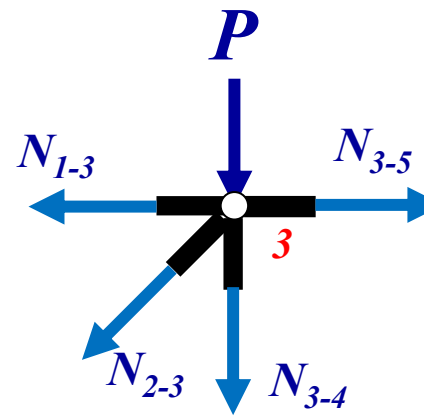
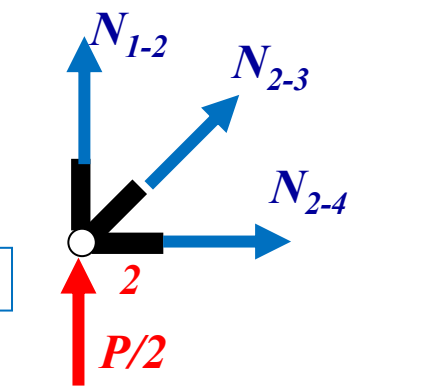
Metoda przekrojów

$$\sum F_x = 0, \sum F_z = 0, \sum M = 0$$



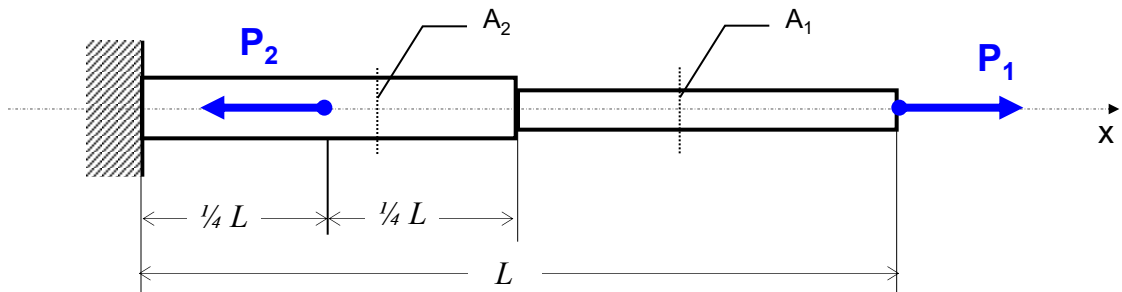
Metoda węzłów

$$\sum F_x = 0, \sum F_z = 0$$



# Zadanie 6.1

Pręt o skokowo zmiennym polu przekroju poprzecznego obciążony został układem sił. Znaleźć:  $N(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $\varepsilon(x)$  i  $u(x)$



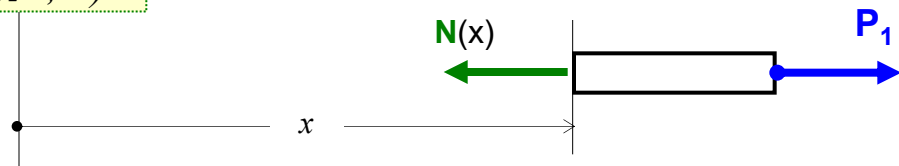
Dane:

$$P_1 = 10 \text{ kN}, \quad P_2 = 2 P_1$$

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 2 A_1$$

$$L = 1 \text{ m}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$ :



$$-N(x) + P_1 = 0$$

$$N(x) = P_1 = 10 \text{ kN}$$

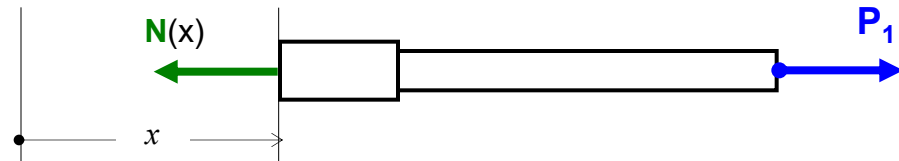
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_1}$$

$$\sigma(x) = \frac{10\,000 \text{ N}}{100 \text{ mm}^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{100 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$ :



$$-N(x) + P_1 = 0$$

$$N(x) = P_1 = 10 \text{ kN}$$

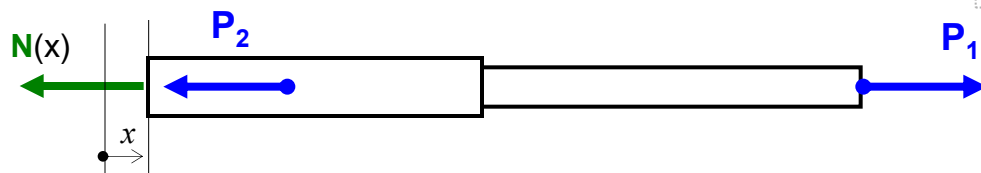
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_2}$$

$$\sigma(x) = \frac{10\,000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{50 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 0,25 \cdot 10^{-3}$$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$ :



$$-N(x) + P_1 - P_2 = 0$$

$$N(x) = P_1 - P_2 = -10 \text{ kN}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_2}$$

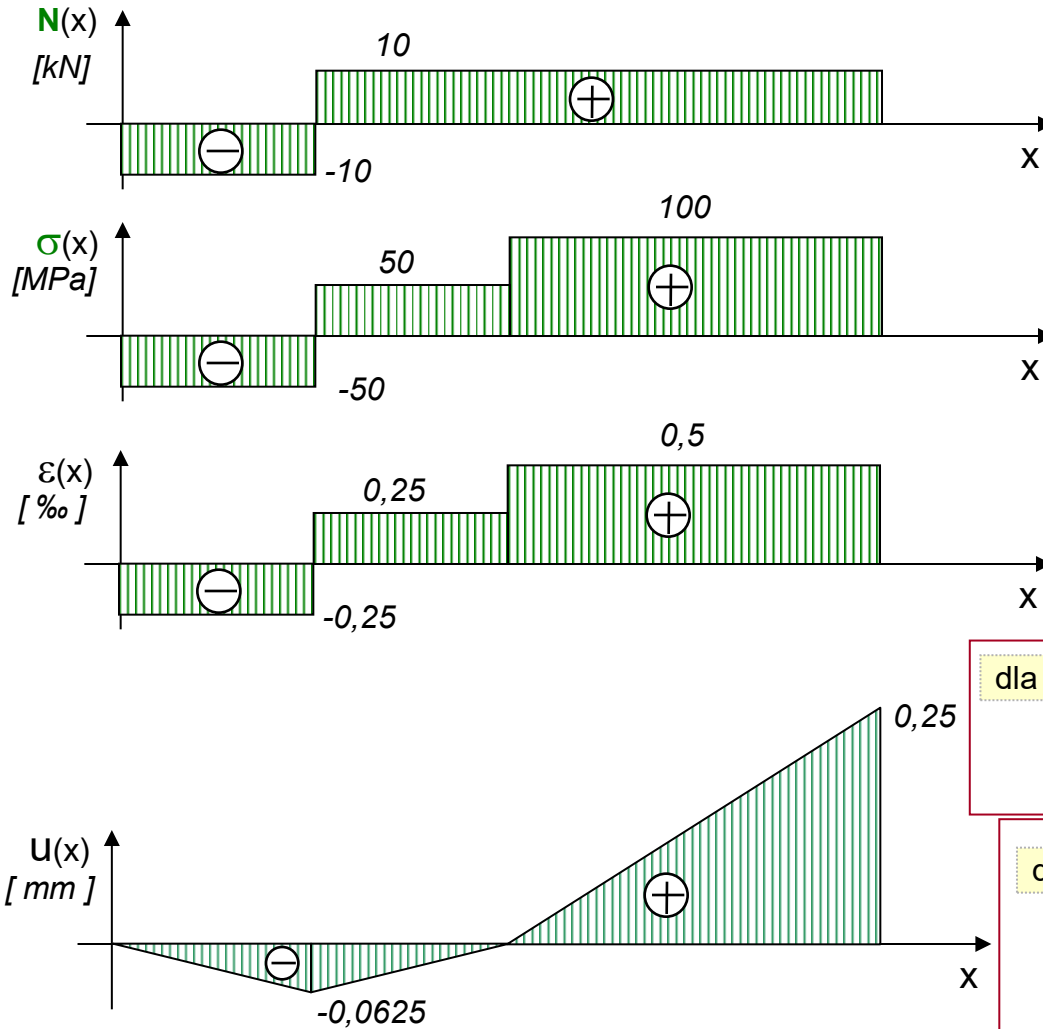
$$\sigma(x) = \frac{-10\,000 \text{ N}}{200 \text{ mm}^2} = -50 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-50 \text{ MPa}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = -0,25 \cdot 10^{-3}$$

# Zadanie 6.1 (c.d.)

Wyniki analizy przedstawiamy na wykresach:



dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$  :  $N(x) = 10 \text{ kN}$

$\sigma(x) = 100 \text{ MPa}$      $\epsilon(x) = 0,5 \cdot 10^{-3}$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$  :  $N(x) = 10 \text{ kN}$

$\sigma(x) = 50 \text{ MPa}$      $\epsilon(x) = 0,25 \cdot 10^{-3}$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$  :  $N(x) = -10 \text{ kN}$

$\sigma(x) = -50 \text{ MPa}$      $\epsilon(x) = -0,25 \cdot 10^{-3}$

Wyznaczenie funkcji przemieszczeń:

$$u(x) = \int_0^x \epsilon(x) dx$$

dla  $x \in (0, \frac{1}{4}L)$  :  $u(x) = \int_0^x \epsilon(x) dx$      $u(x) = -0,25 \cdot 10^{-3} \cdot x$

$u\left(\frac{1}{4}L\right) = -0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \text{ mm} = -0,0625 \text{ mm}$

dla  $x \in (\frac{1}{4}L, \frac{1}{2}L)$  :  $u(x) = u\left(\frac{1}{4}L\right) + \int_{\frac{1}{4}L}^x \epsilon(x) dx$

$u(x) = -0,0625 + 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot \left(x - \frac{1}{4}L\right)$

$u\left(\frac{1}{2}L\right) = -0,0625 \text{ mm} + 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \text{ mm} = 0$

dla  $x \in (\frac{1}{2}L, L)$  :

$u(x) = u\left(\frac{1}{2}L\right) + \int_{\frac{1}{2}L}^x \epsilon(x) dx$

$u(x) = 0 + 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}L\right)$

$u(L) = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$

Funkcja  $\epsilon(x)$  jest pochodną funkcji  $u(x)$  !

## Zadanie 6.2 (obserwator na powierzchni)

Na jaką głębokość można opuścić windę zawieszoną na stalowej linie jeśli naprężenia dopuszczalne wynoszą  $k_r=50$  MPa? Wyznaczyć całkowite wydłużenie liny.

**Dane:**  $Q=6$  kN ,  $A=2$  cm<sup>2</sup> ,  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup> ,  $E=2 \cdot 10^5$  MPa ,  $\rho=7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>

Równanie równowagi na oś x:

$$-N(x) + Q + G = 0$$

$$N(x) = Q + \rho g A \cdot (L - x)$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\sigma(x) = \frac{Q}{A} + \rho g \cdot (L - x)$$

Odształcenia:

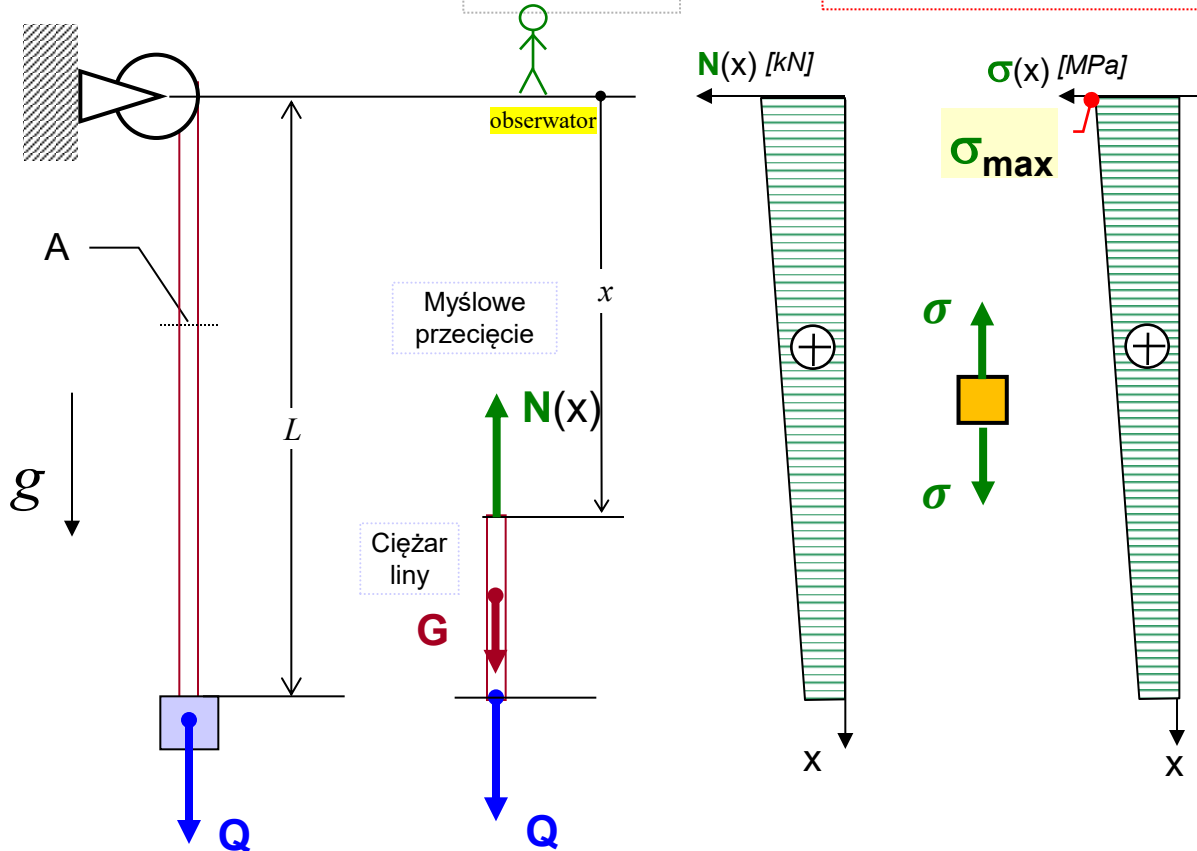
$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot (L - x)}{E}$$

Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{A} + \rho g L \leq k_r$$

$$L \leq \frac{k_r A - Q}{\rho g A}$$



$$L \leq \frac{50 \frac{N}{mm^2} \cdot 200mm^2 - 6000N}{7,8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}m^2}$$

$$L_{max} = 261m$$

## Zadanie 6.2 (obserwator na powierzchni c.d.)

Odształcenia:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)}$$



$$\varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot (L - x)}{E}$$

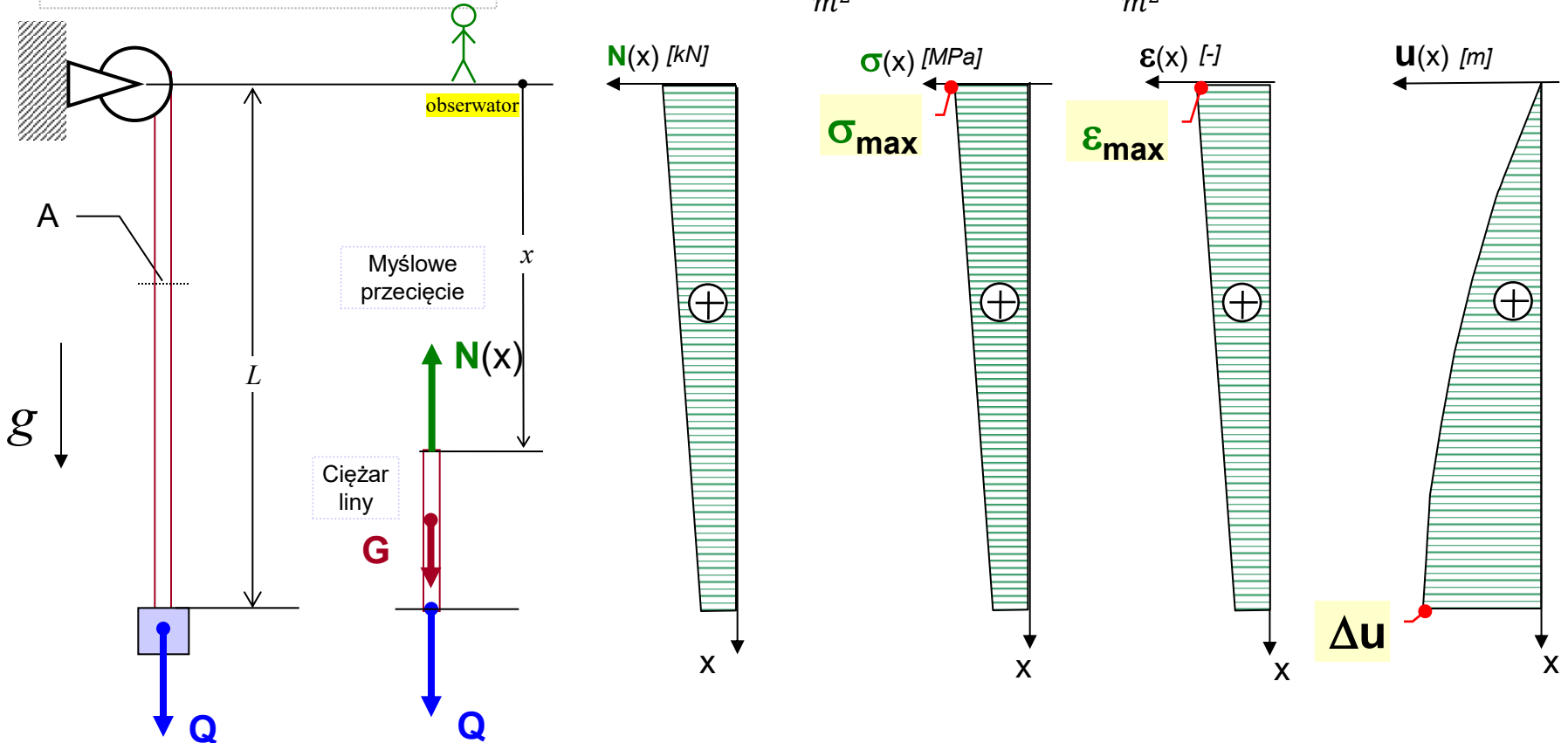
Wyznaczenie funkcji przemieszczeń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

$$u(x) = \int_0^x \left( \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot (L - x)}{E} \right) dx$$

$$u(x) = \frac{Q \cdot x}{AE} + \frac{\rho g}{E} \cdot \left( L - \frac{x}{2} \right) x$$

$$\Delta u = u(L) = \frac{Q \cdot L}{AE} + \frac{\rho g \cdot L^2}{2E} = \frac{6000 \text{ N} \cdot 261 \text{ m}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} + \frac{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (261 \text{ m})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,052 \text{ m} = 5,2 \text{ cm}$$



## Zadanie 6.2 (obserwator w windzie)

Na jaką głębokość można opuścić windę zawieszoną na stalowej linie jeśli naprężenia dopuszczalne wynoszą  $k_r=50$  MPa? Wyznaczyć całkowite wydłużenie linii.

**Dane:**  $Q=6$  kN ,  $A=2$  cm<sup>2</sup> ,  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup> ,  $E=2 \cdot 10^5$  MPa ,  $\rho=7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>

Równanie równowagi na oś x:

$$N(x) - Q - G = 0$$



$$N(x) = Q + \rho g A \cdot x$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$



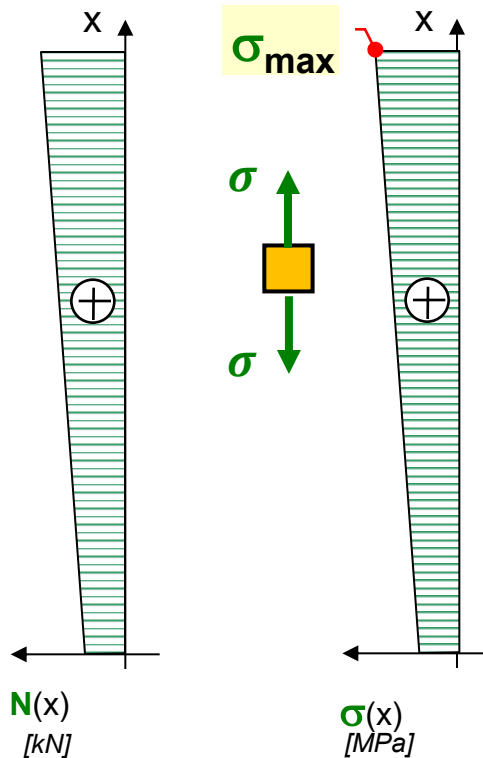
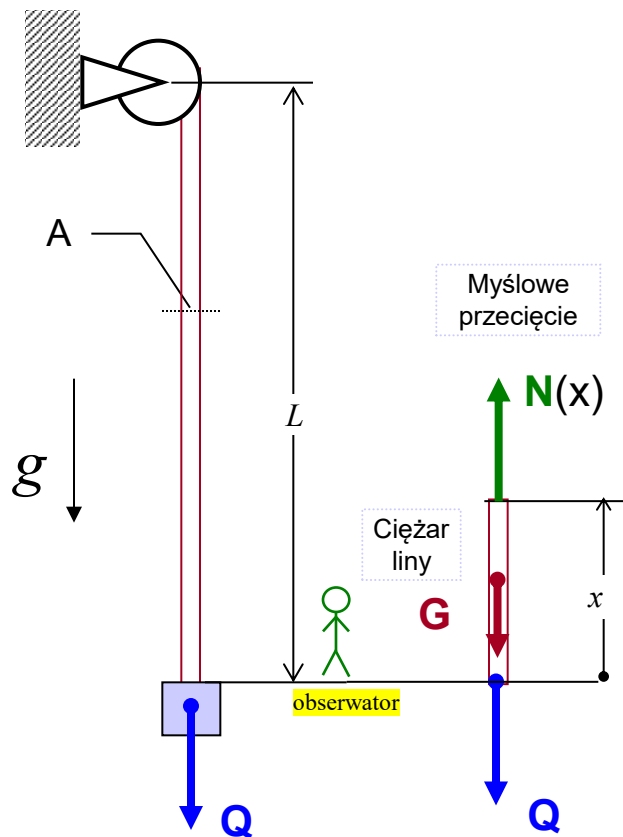
$$\sigma(x) = \frac{Q}{A} + \rho g \cdot x$$

Odształcenia:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)}$$



$$\varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E}$$



Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{A} + \rho g L \leq k_r$$

$$L \leq \frac{k_r A - Q}{\rho g A}$$

$$L \leq \frac{50 \frac{N}{mm^2} \cdot 200 mm^2 - 6000 N}{7,8 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2}$$

$$L_{max} = 261 m$$

## Zadanie 6.2 (obserwator w windzie c.d.)

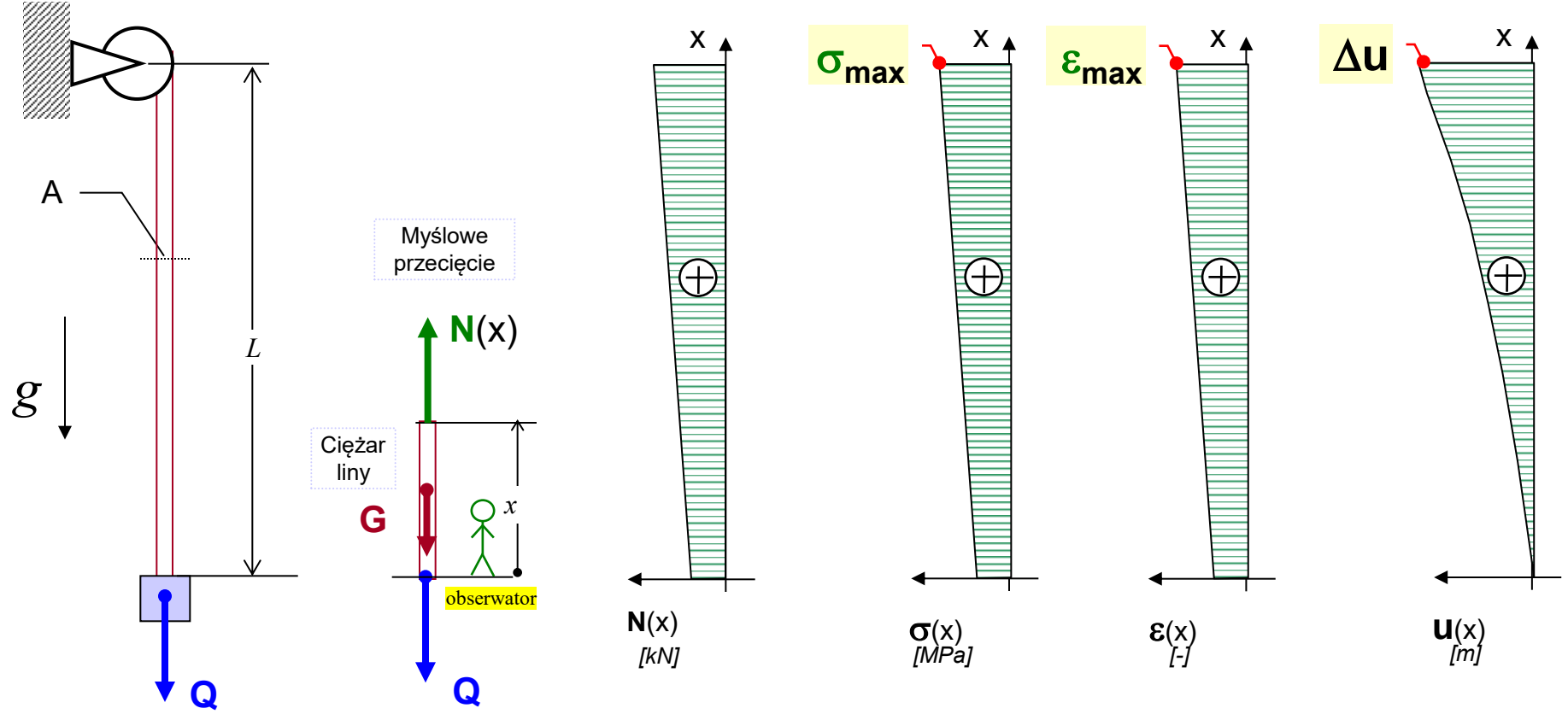
Odształcenia:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(x) = \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E}$$

Wyznaczenie funkcji przemieszczeń:

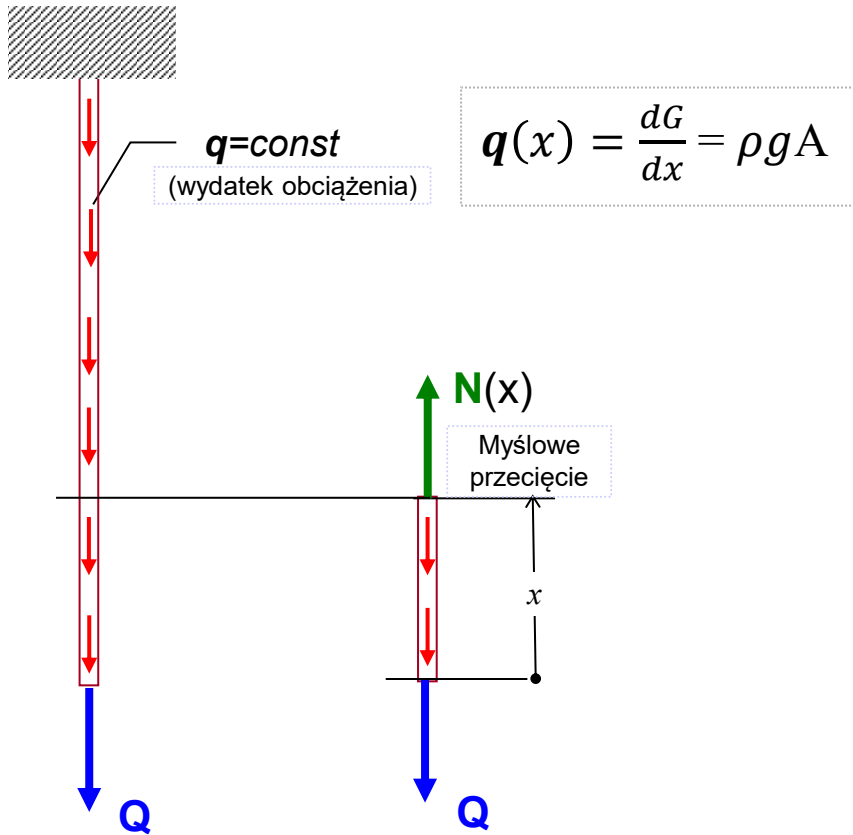
$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx \quad \rightarrow \quad u(x) = \int_0^x \left( \frac{Q}{AE} + \frac{\rho g \cdot x}{E} \right) dx \quad \rightarrow \quad u(x) = \frac{Q \cdot x}{AE} + \frac{\rho g \cdot x^2}{2E}$$

$$\Delta u = u(L) = \frac{Q \cdot L}{AE} + \frac{\rho g \cdot L^2}{2E} = \frac{6000N \cdot 261m}{2 \cdot 10^{-4}m^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}} + \frac{7800 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (261m)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}} = 0,052m = 5,2cm$$



## Zadanie 6.2 (rozwiązanie alternatywne)

Posłużymy się pojęciem wydatku obciążenia



Równanie równowagi na oś  $x$ :

$$N(x) - \int_0^x q(x) dx - Q = 0$$



$$N(x) = Q + q \cdot x$$



$$N(x) = Q + \rho g A \cdot x$$

(Dalej tak jak poprzednio)

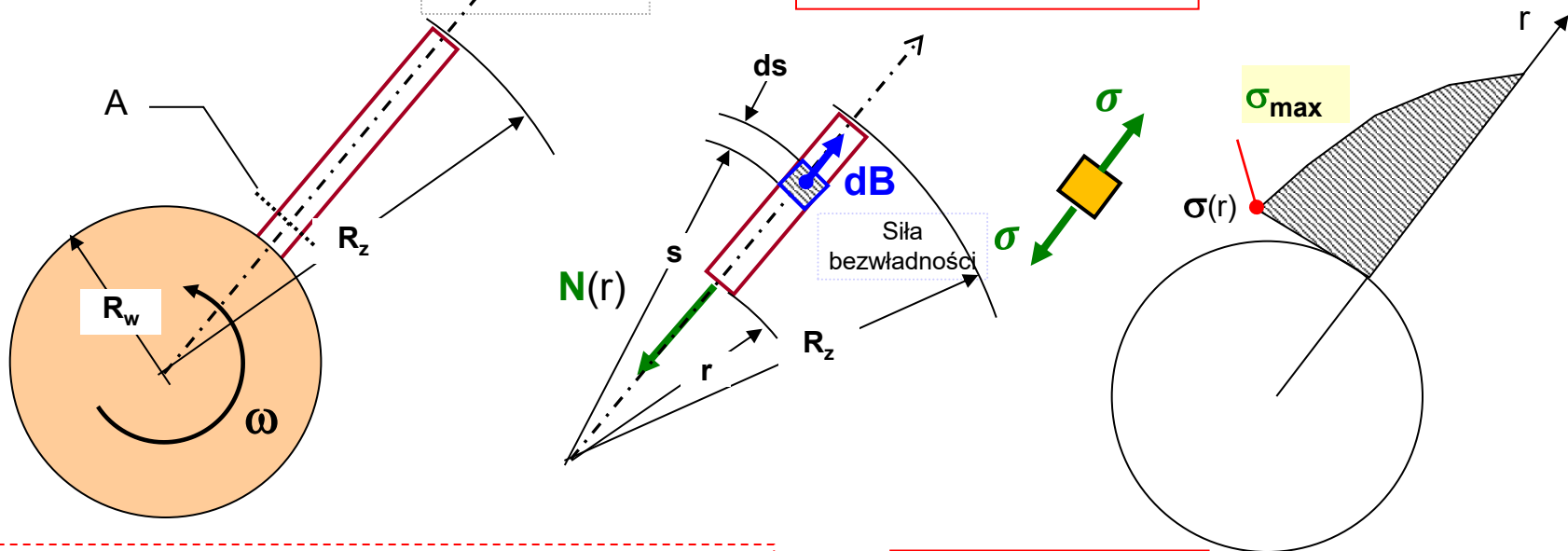
## Zadanie 6.3

Pręt osadzony na wale wiruje z prędkością kątową  $\omega$ . Jaka jest dopuszczalna wartość  $\omega_{max}$ ?

Dane:  $R_w = 0,5 \text{ m}$ ,  $R_z = 1 \text{ m}$ ,  $A$ - dowolne,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $R_e = 240 \text{ MPa}$ ,  $n_e = 2$

Równanie równowagi na oś r:  $-N(r) + \int_r^{R_z} dB = 0 \rightarrow N(r) = \int_r^{R_z} \omega^2 \cdot s \cdot \rho A \cdot ds$  Przyspieszenie bezwładności  $N(r) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A (R_z^2 - r^2)$

Naprężenia normalne:  $\sigma(r) = \frac{N(r)}{A(r)} \rightarrow \sigma(r) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (R_z^2 - r^2)$



Warunek bezpieczeństwa:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2) \leq k_r = \frac{R_e}{n_e}$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{2 \left( \frac{R_e}{n_e} \right)}{\rho (R_z^2 - R_w^2)}}$$

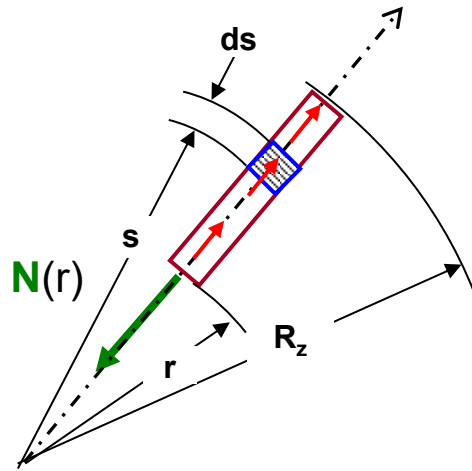
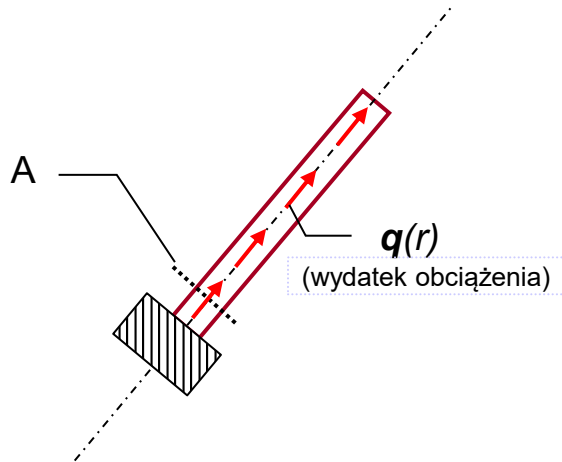
$$\omega_{max} = 203 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$$

$$n_{max} = \frac{60}{2\pi} \omega_{max} = 1939 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$$

## Zadanie 6.3 (rozwiązanie alternatywne)

Posłużymy się pojęciem wydatku obciążenia

$$q(r) = \frac{dB}{dr} = \omega^2 r \rho A$$



Równanie równowagi na oś r:

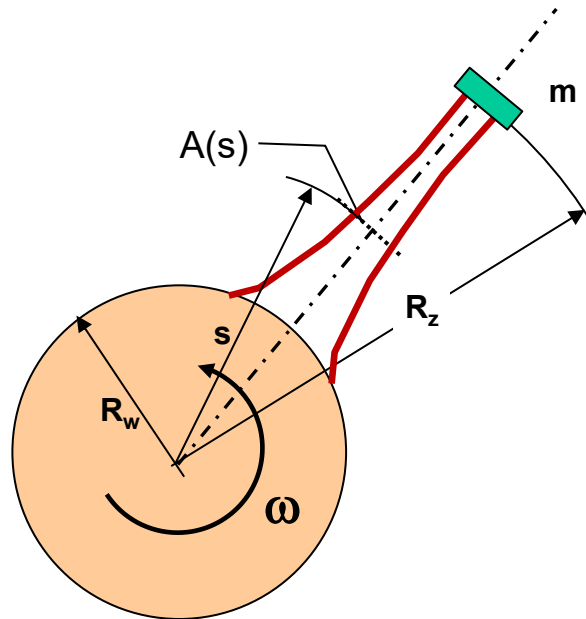
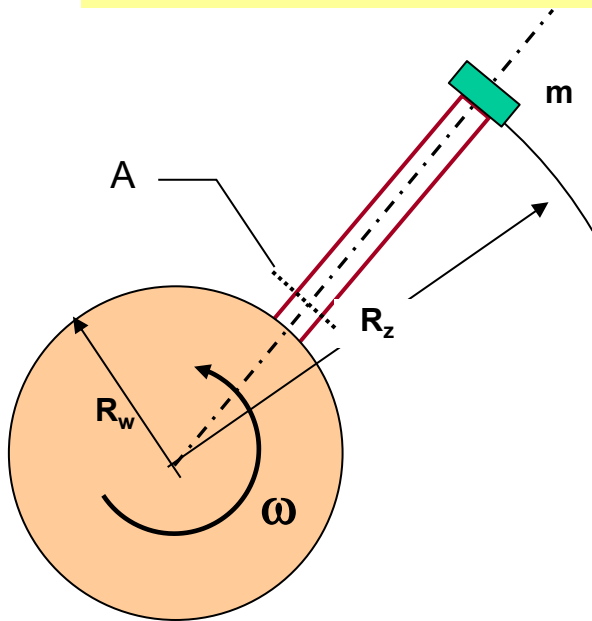
$$-N(r) + \int_r^{R_z} q ds = 0$$

$$\rightarrow N(r) = \int_r^{R_z} \omega^2 \cdot s \cdot \rho A \cdot ds$$

$$N(r) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A (R_z^2 - r^2)$$

(Dalej tak jak poprzednio)

## Modyfikacje zadania 6.3



Z równania równowagi na oś r:

$$N(r) = \int_r^{R_z} \omega^2 \cdot s \cdot \rho A(s) \cdot ds + \omega^2 \cdot R_z \cdot m$$

Naprężenia normalne:

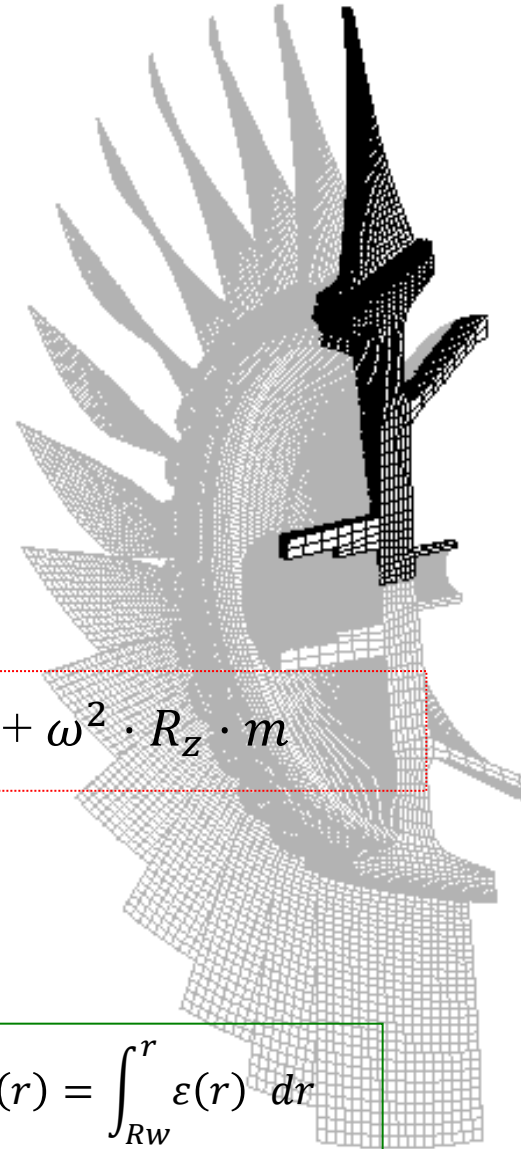
$$\sigma(r) = \frac{N(r)}{A(r)}$$

Odształcenia:

$$\varepsilon(r) = \frac{\sigma(r)}{E(r)}$$

Przemieszczenia:

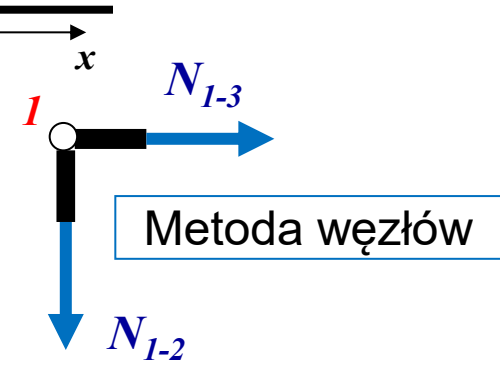
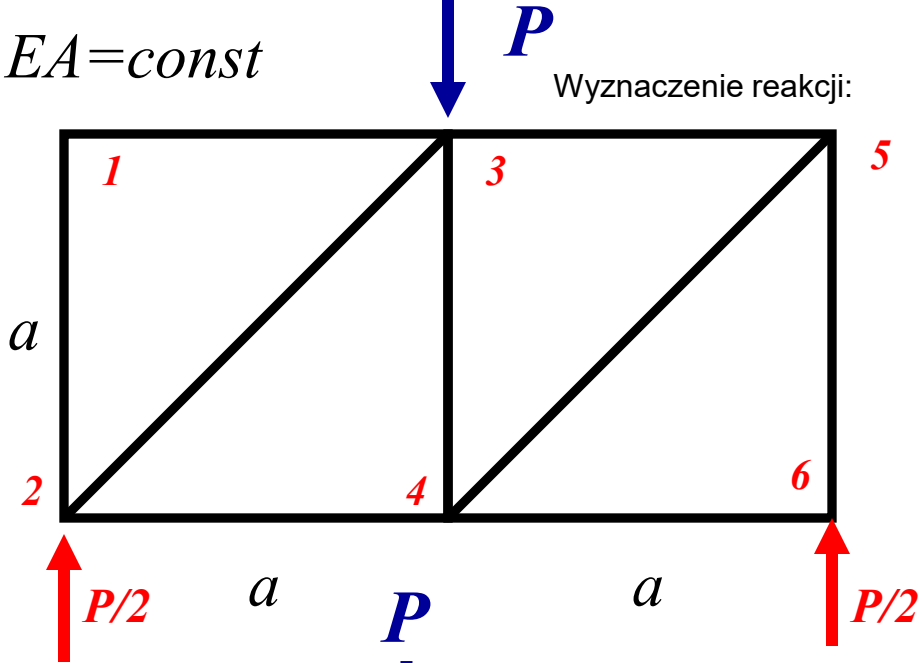
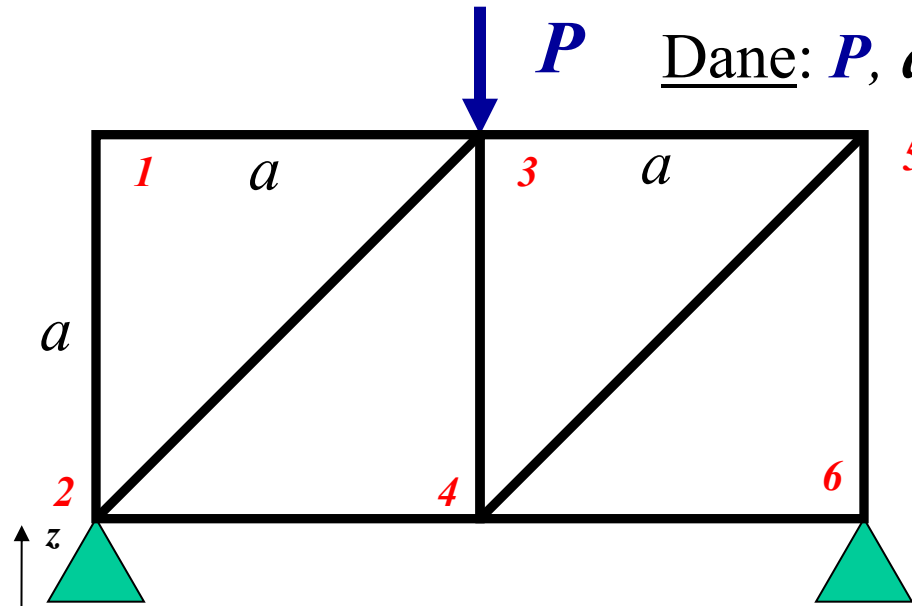
$$u(r) = \int_{R_w}^r \varepsilon(r) \, dr$$



## Zadanie 6.4 Rozwiązać kratownicę płaską

**Dane:**  $P$ ,  $a$ ,  $EA = const$

Wyznaczenie reakcji:

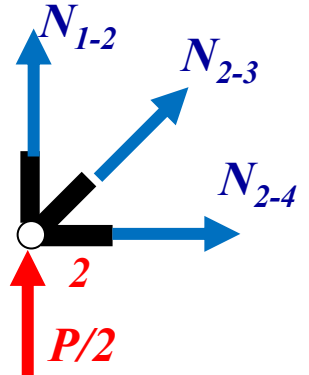


$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$N_{1-3} = 0$$

$$N_{1-2} = 0$$

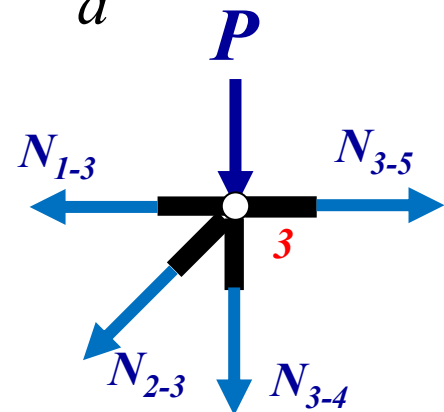


$$N_{2-4} + N_{2-3} \cos 45^\circ = 0$$

$$\frac{1}{2}P + N_{2-3} \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{2-4} = \frac{1}{2}P$$

$$N_{2-3} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}P$$



$$N_{3-5} - N_{2-3} \cos 45^\circ = 0$$

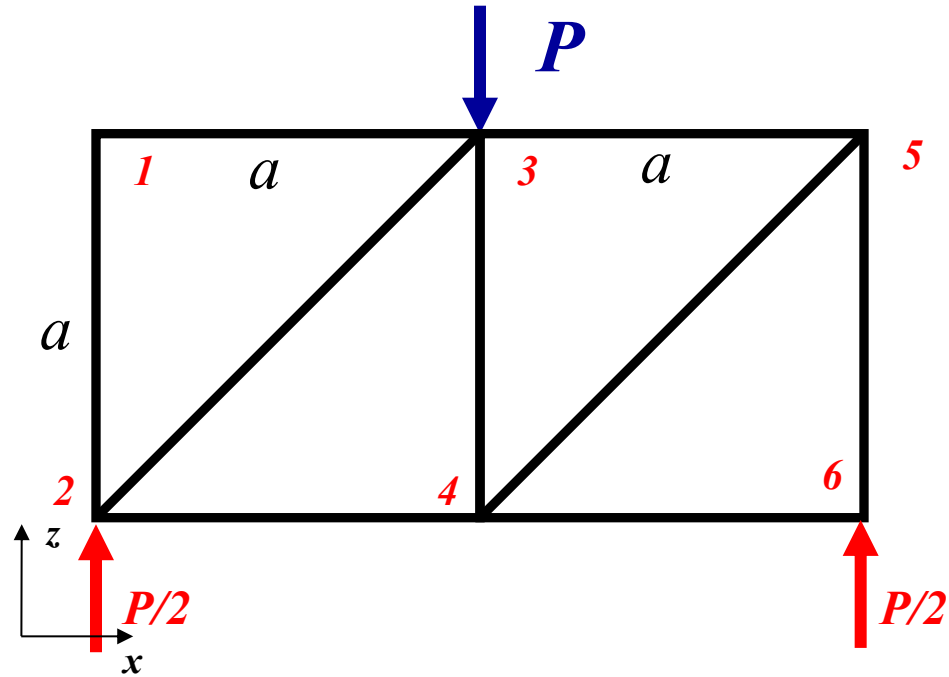
$$-P - N_{2-3} \sin 45^\circ - N_{3-4} = 0$$

$$N_{3-5} = -\frac{1}{2}P$$

$$N_{3-4} = -\frac{1}{2}P$$

i.t.d

## Zadanie 6.4 (Przedstawienie wyników)



$$N_{1-3}=0$$

$$N_{1-2}=0$$

$$N_{2-4} = \frac{1}{2}P$$

$$N_{2-3} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}P$$

$$N_{3-5} = -\frac{1}{2}P$$

$$N_{3-4} = -\frac{1}{2}P$$

i.t.d

Przebieg sił normalnych  
w prętach kratownicy

